ECOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES
ECOLE CENTRALE DE LYON

ECOLE SUPERIEURE D'ELECTRICITE
ECOLE SUPERIEURE D'OPTIQUE

Concours d'admission 1980

P'

MATHEMATIQUES I
(trois pages dactylographiées)

Notations

- $\mathbb{C}$ désigne le corps des nombres complexes. Tous les espaces vectoriels considérés dans ce problème seront des espaces vectoriels sur $\mathbb{C}$.
- On note $\mathbb{C}[X]$ l'algèbre des polynômes à coefficients dans $\mathbb{C}$. Si P est un élément non nul de $\mathbb{C}[X]$, on note deg P le degré de P ; on dit que P est unitaire si de plus le coefficient du terme de plus haut degré de P est 1. Si P, Q sont deux polynômes non nuls de $\mathbb{C}[X]$, on note pgcd (P,Q) leur plus grand commun diviseur, unitaire, et ppcm (P,Q) leur plus petit commun multiple, unitaire.
- On note $\mathbb{C}(X)$ le corps des fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{C}$. Si $R \in \mathbb{C}(X)$, et si Z(R) désigne l'ensemble des pôles de R, on identifie R avec la fonction définie sur $\mathbb{C}\sim Z(R)$ qui prend au point x la valeur R(x).
- Si α est un réel strictement positif, on note $D(0,\alpha)$ le disque : $\{ x \in \mathbb{C} \text{ et } |x| < \alpha \}$
- On appelle suite à termes complexes toute application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$. On note $\mathcal{E}$ l'ensemble de ces suites, qui sera muni de sa structure habituelle d'espace vectoriel.
- δ_{ij} est le réel qui vaut 1 si i = j, 0 si i ≠ j (symbole de Kronecker)

I-1 Soit P un polynôme unitaire de $\mathbb{C}[X]$: $P(X) = X^k - \sum_{j=0}^{k-1} a_j X^j$.

On note $\mathcal{E}_P = \{ u \in \mathcal{E} ; \forall n \in \mathbb{N} : u(n+k) = \sum_{j=0}^{k-1} a_j u(n+j) \}$

a) Montrer que $\mathcal{E}_P$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$.

b) Grâce à l'application $\psi : \mathcal{E}_P \to \mathbb{C}^k$
$u \longmapsto (u(0),\ldots,u(k-1))$
déterminer la dimension de $\mathcal{E}_P$.

I-2 Soit $P(X) = X^2 - 4X + 4$, et $\tilde{P}(X) = X^2 P(\frac{1}{X})$

a) On pose $R(X) = \frac{1+X}{\tilde{P}(X)}$. Montrer que R admet un développement en série entière sur $D(0,\frac{1}{2})$; déterminer ce développement.

En déduire, pour tout $p \in \mathbb{N}$, un développement limité de R à l'ordre p au voisinage de 0.

b) Soit $u \in \mathcal{E}_p$ tel que u(0) = 1, u(1) = 5.

Calculer, pour tout $p \geq 2$: $(\sum_{n=0}^{p} u(n)x^n)\,\tilde{P}(x)$

En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la valeur de u(n).

I-3 On généralise la méthode précédente à un polynôme unitaire quelconque.

a) On pose $\tilde{P}(X) = X^{\deg P} P(\frac{1}{X})$. Montrer que $\tilde{P} \in \mathbb{C}[X]$ et que deg $\tilde{P} \leq$ deg P.

b) On désigne par $\{\frac{1}{\alpha_1}, \ldots, \frac{1}{\alpha_s}\}$ l'ensemble des zéros de $\tilde{P}$, et par n_i l'ordre de multiplicité de $\frac{1}{\alpha_i}$. On pose enfin $q = \deg P - \deg \tilde{P}$.

On introduit alors les suites $v_{i,j}$ et w_i définies de la façon suivante :

$\forall i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq s$, $\forall j \in \mathbb{N}$, $0 \leq j \leq n_i - 1$, $v_{i,j}(n) = n^j \alpha_i^n$

(par convention, $x^0 = 1$ pour tout $x \in \mathbb{C}$)

$\forall i \in \mathbb{N}$, $0 \leq i \leq q-1$ (si $q \geq 1$), $w_i(n) = \delta_{i,n}$.

On considère $P_0 \in \mathbb{C}[X]$ qui est, ou bien nul, ou bien tel que deg $P_0 <$ (deg P) - 1, et $R \in \mathbb{C}(X)$ définie par $R = \frac{P_0}{\tilde{P}}$.

.../...

-Montrer que R est développable en série entière sur au moins un disque D(0,α), où α>0.

-On pose : $R(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} r(n)\, x^n$, pour $|x| < \alpha$. Montrer que la suite r est combinaison linéaire des suites $v_{i,j}, w_i$ introduites ci-dessus. En déduire en particulier, pour tout $p \in \mathbb{N}$, un développement limité de R à l'ordre p au voisinage de 0.

c) Pour $p \geqslant \deg P$, calculer $(\sum_{0}^{p} u(n)\, x^n)\, \tilde{P}(x)$, où $u \in \mathcal{E}_p$.

d) En déduire une base de $\mathcal{E}_p$.

I-4 Soient P, Q deux polynômes unitaires de $\mathbb{C}[X]$, M = ppcm (P,Q), Δ = pgcd (P,Q)

a) Montrer que $\mathcal{E}_P + \mathcal{E}_Q = \mathcal{E}_M$

b) Montrer que $\mathcal{E}_P \cap \mathcal{E}_Q = \mathcal{E}_\Delta$

Application Déterminer les $u \in \mathcal{E}$ satisfaisant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les conditions :

$u(n+4) + 2u(n+3) + 3u(n+2) + 2u(n+1) + u(n) = 0$

$u(n+4) + u(n+3) + 2u(n+2) + u(n+1) + u(n) = 0$

avec de plus $u(0) = 1$; $u(1) = 0$

II Dans cette partie, on note, pour x réel, [x] la partie entière de x, c'est à dire l'unique entier relatif m tel que $m \leqslant x < m+1$.

II-1 Soit $P(X) = X^3 - 3X^2 + 1$. Montrer que P admet trois racines réelles α, β, γ telles que : $2 < \alpha < 3$; $0 < \beta < \frac{1}{2}$; $-1 < \gamma < 0$. Montrer aussi que $|\gamma| < |\beta|$.

II-2 On pose $u(n) = \alpha^n + \beta^n + \gamma^n$, pour $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u(n) est un entier relatif.

b) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $0 < u(n) - \alpha^n < 1$

En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $u(n) - 1 = [\alpha^n]$

c) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v(n) = [\alpha^n]$. Montrer qu'il existe $P_1 \in \mathbb{C}[X]$, unitaire, de degré 5, que l'on déterminera, tel que $v \in \mathcal{E}_{P_1}$.

d) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, 3 divise u(n)

II-3 Application. Etudier la nature de la série de terme général $\sin(\frac{2\pi}{3}\alpha^n)$

II-4 Soit $w \in \mathcal{E}$ vérifiant les deux conditions :

(1) $\exists (\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $w(n) = \alpha^n + \lambda\beta^n + \mu\gamma^n$

(2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, w(n) est un entier relatif.

Montrer : w = u.

III On note dans cette partie $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{C}$

III-1 Soit $n \geqslant 3$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $A = [a_{ij}]_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$

On considère $B \in \mathcal{M}_{n-2}(\mathbb{C})$ définie par : $B = [b_{ij}]_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n-2 \\ 1 \leqslant j \leqslant n-2}}$ où $b_{ij} = a_{i+1,j+1}$.

On note enfin A_{ij} le cofacteur de a_{ij} dans A, c'est à dire :

$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det C_{ij}$, où C_{ij} est la sous-matrice de A obtenue en supprimant à A la ième ligne et la jème colonne.

a) Si $\det A \neq 0$, montrer la relation :

(R) $\det A \times \det B = A_{11}A_{nn} - A_{n1}A_{1n}$

On pourra, pour cela, effectuer le produit AD où $D = [d_{ij}]_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ est l'élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ défini par :

$\forall i \in [1,n]$ $d_{i1} = A_{1i}$,

$\forall i \in [1,n]$ $d_{in} = A_{ni}$,

$\forall i \in [2,n-1]$ $d_{ij} = \delta_{ij}$.

.../...

Autrement dit, D peut être représentée par le tableau

$$\begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 & A_{n1} \\ A_{12} & 1 & 0 & \dots & 0 & A_{n2} \\ A_{13} & 0 & 1 & \dots & 0 & A_{n3} \\ \vdots & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \\ A_{1n} & 0 & \dots & & 0 & A_{nn} \end{bmatrix}$$

b) Montrer que (R) est encore vraie si det A = 0.

(On pourra remarquer que (R) est valable lorsque l'on remplace A par A - λI, où λ n'est pas valeur propre de A ; I désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$]

III-2 Soit $u \in \mathcal{E}$. On pose, pour (P,n) $\in \mathbb{N}^2$:

$$D_n^p = \det \begin{bmatrix} u(n) & u(n+1) & \dots & u(n+p) \\ u(n+1) & u(n+2) & \dots & u(n+p+1) \\ \vdots & & & \\ u(n+p) & u(n+p+1) & \dots & u(n+2p) \end{bmatrix}$$

Montrer la relation :

(R_1) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall p \geq 2$ $\quad D_n^p D_{n+2}^{p-2} = D_{n+2}^{p-1} D_n^{p-1} - (D_{n+1}^{p-1})^2$

III-3 On suppose dans cette question que u est un élément de $\mathcal{E}$ qui vérifie la condition :

il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, $p_0 \in \mathbb{N}$ tels que : $\forall n \geq n_0$, $D_n^{p_0} = 0$.

a) Montrer que si $D_{n_0+1}^{p_0-1} = 0$ (et $p_0 \geq 1$) alors $\forall n \geq n_0 + 1$: $D_n^{p_0-1} = 0$

b) En déduire qu'il existe $(n_1,p_1) \in \mathbb{N}^2$ tel que :

$\forall n \geq n_1$, $D_n^{p_1} = 0$ et de plus $D_{n+1}^{p_1-1} \neq 0$ (si $p_1 \geq 1$; cette dernière condition étant supprimée si $p_1 = 0$)

c) En supposant $p_1 \geq 1$, montrer qu'à tout $n \geq n_1+1$, on peut associer $(a_0, \dots, a_{p_1-1})$ appartenant à $\mathbb{C}^{p_1}$, unique, tel que :

$$\begin{cases} u(n+p_1) = a_{p_1-1}\, u(n+p_1-1) + \dots + a_1\, u(n+1) + a_0\, u(n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u(n+2p_1-1) = a_{p_1-1}\, u(n+2p_1-2) + \dots + a_1\, u(n+p_1) + a_0\, u(n+p_1-1) \end{cases}$$

d) Montrer que $(a_0, \dots a_{p_1-1})$ ne dépend pas de n.

En déduire qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$, unitaire, tel que $u \in \mathcal{E}_p$

Application. Déterminer les $u \in \mathcal{E}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \det \begin{bmatrix} u(n) & u(n+1) & u(n+2) \\ u(n+1) & u(n+2) & u(n+3) \\ u(n+2) & u(n+3) & u(n+4) \end{bmatrix} = 0$$

avec de plus u(0) = 2, u(1) = 1, u(2) = 3, u(3) = 4

*****
***
*

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail